

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМАХ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Увеличение сложности современных систем переработки, передачи и хранения информации выдвигает на первый план требование к надежности и контролю различных управляющих и вычислительных систем. Актуальной проблеме построения асимптотически оптимальных по надежности схем, реализующих булевы функции, при произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», посвящена эта статья. Цель работы – получить ответы на вопросы: Можно ли произвольную булеву функцию реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой и какова ненадежность этой схемы?

Материалы и методы. В работе используются ранее известные методы синтеза надежных схем и получения оценок ненадежности схем.

Результаты. Доказано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, получены верхняя и нижняя оценки ненадежности этой схемы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Выводы. При произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», возможна реализация почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надежности схемой.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, неисправности на входах элементов.

М. А. Alekhina

ON CIRCUITS BEING ASYMPTOTICALLY OPTIMAL BY RELIABILITY IN CASES OF GATE FAILURES

Abstract.

Background. The increase of complexity of modern systems of data processing, transmission and storage emphasizes a requirement of safety and monitoring over various control and computing systems. The article is devoted to topical problems of formation of circuits, asymptotically optimal by reliability, that realize Boolean functions in cases of random gate failures in the basis consisting of the “anticonjunction” function. The aim of the work is to find answers to the following questions: Is it possible to realize an arbitrary Boolean function by a circuit with asymptotically optimal reliability and how unreliable is the said circuit?

Materials and methods. The study applied previously known methods of reliable circuit synthesis and circuit reliability estimation.

Results. It has been proved that virtually any Boolean function may be realized by a circuit with asymptotically optimal reliability. The article shows the upper and lower estimates of unreliability of the said circuit. The obtained results may be used in technical system design in order to increase their reliability.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00273.

Conclusions. In the case of random gate failures in the basis consisting of the “anticonjunction” function it is possible to realize virtually any Boolean function by a circuit with asymptotically optimal reliability.

Key words: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, failures on inputs of gates.

При построении тестов (проверочных или диагностических) [1–4], при синтезе самокорректирующихся схем или схем из ненадежных функциональных элементов [5–8] авторы, как правило, рассматривают неисправности одного конкретного типа (например, только константные неисправности типа 0). Ранее [9, 10] были предприняты попытки построения надежных схем из ненадежных элементов при наличии нескольких неисправностей разного типа (например, константные неисправности типа 0 и типа 1). В отличие от упомянутых работ, в этой статье рассматривается самый общий источник неисправностей [11, с. 480], когда базисный элемент с булевой функцией $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ в неисправном состоянии реализует любую булеву функцию $\varphi'(x_1, \dots, x_k)$, отличную от $\varphi(x_1, \dots, x_k)$. Для простоты изложения будем считать, что полный базис содержит только одну функцию. Например, функцию штрих Шеффера.

Итак, рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных элементов в полном базисе, состоящем из функции штрих Шеффера $\{x | y\}$ ($x | y = \overline{x \& y}$). Предположим, что базисный элемент наряду с исправным режимом функционирования (в котором он реализует функцию $f_1(x, y) = x | y$) имеет $2^2 - 1 = 15$ неисправных режимов, в каждом из которых он реализует одну из функций двух переменных $f_2, f_3, \dots, f_{16}$, отличную от функции $x | y$. Пусть

$$f_2(x, y) = \overline{x \vee y}, f_3(x, y) = x \& y, f_4(x, y) = x \vee y, f_5(x, y) = \overline{x} \vee y,$$

$$f_6(x, y) = \overline{x} \& y, f_7(x, y) = x \vee \overline{y}, f_8(x, y) = x \& \overline{y}, f_9(x, y) = x \oplus y,$$

$$f_{10}(x, y) = x \sim y, f_{11}(x, y) = 0, f_{12}(x, y) = 1, f_{13}(x, y) = x,$$

$$f_{14}(x, y) = \overline{x}, f_{15}(x, y) = y, f_{16}(x, y) = \overline{y}.$$

Обозначим вероятности появления этих функций через $p_2, p_3, \dots, p_{16}$

соответственно. Тогда $\varepsilon = \sum_{i=2}^{16} p_i$ – вероятность повреждения базисного эле-

мента, $\overline{\varepsilon} = \min p_i$ ($i \in \{2, 3, \dots, 16\}$) – наименьшая из вероятностей неисправного режима функционирования базисного элемента.

Для описанного источника неисправностей в книге [11, с. 480] приведен следующий результат: «При $\overline{\varepsilon} > 0$ произвольную булеву функцию нельзя реализовать схемой, ненадежность которой сколь угодно мала, ибо всегда ненадежность схемы больше ε ». Однако это утверждение при некоторых значениях вероятностей $p_2, p_3, \dots, p_{16}$ неверно. Например, если $p_2 > 0$, а $p_i = 0$ при всех $i \in \{3, \dots, 16\}$, то $\varepsilon = p_2 = \overline{\varepsilon} > 0$, но (см. [8]) любую булеву

функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надежности. И этот результат согласуется с результатами работы [12].

Цель данного исследования – получить ответы на вопросы: Можно ли произвольную булеву функцию реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой и какова ненадежность этой схемы?

Функционирование базисного элемента можно описать с помощью табл. 1, в которой приведены вероятности ошибок базисного элемента в каждом из режимов функционирования.

Таблица 1

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	p_3	p_4	0	p_6	0	p_8	p_9	0	p_{11}	0	p_{13}	0	p_{15}	0
0	1	0	p_2	p_3	0	0	0	p_7	p_8	0	p_{10}	p_{11}	0	p_{13}	0	0	p_{16}
1	0	0	p_2	p_3	0	p_5	p_6	0	0	0	p_{10}	p_{11}	0	0	p_{14}	p_{15}	0
1	1	0	0	p_3	p_4	p_5	0	p_7	0	0	p_{10}	0	p_{12}	p_{13}	0	p_{15}	0

При вычислении вероятностей ошибок использовано следующее рассуждение: на двоичном наборе (a_1, a_2) вероятность ошибки для функции f_i равна 0, если $f_i(a_1, a_2) = a_1 | a_2$; если же $f_i(a_1, a_2) \neq a_1 | a_2$, то вероятность ошибки равна p_i .

Введем необходимые понятия и определения.

Считаем, что схема из ненадежных функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагаем, что любой из элементов схемы независимо от других элементов переходит в неисправное состояние, в котором с вероятностью p_2 реализует функцию f_2 , с вероятностью p_3 реализует функцию f_3 и т.д., с вероятностью p_{16} реализует функцию f_{16} . Считаем также, что $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность по-

явления значения $\overline{f(\tilde{a}^n)}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S , т.е.

$$P(S) = \max \left\{ P_{f(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n) \right\}. \text{ Надежность схемы } S \text{ равна } 1 - P(S).$$

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию f .

Схему A из ненадежных элементов, реализующую функцию f , назовем асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Учитывая вероятности ошибок, приведенные в табл. 1, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E на каждом из четырех входных наборов:

$$\begin{aligned} P_0(E, (00)) &= \sum_{i \in N_1} p_i, \quad P_0(E, (01)) = \sum_{i \in N_2} p_i, \\ P_0(E, (10)) &= \sum_{i \in N_3} p_i, \quad P_1(E, (11)) = \sum_{i \in N_4} p_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \{3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15\}, \quad N_2 = \{2, 3, 7, 8, 10, 11, 13, 16\}, \\ N_3 &= \{2, 3, 5, 6, 10, 11, 14, 15\}, \quad N_4 = \{3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15\}. \end{aligned}$$

Обозначим вероятности ошибок на выходе базисного элемента $P_0(E, (00))$, $P_0(E, (01))$, $P_0(E, (10))$, $P_1(E, (11))$ через $\alpha, \beta, \delta, \tau$ соответственно, т.е. $\alpha = P_0(E, (00))$, $\beta = P_0(E, (01))$, $\delta = P_0(E, (10))$, $\tau = P_1(E, (11))$. Тогда ненадежность $P(E)$ элемента E равна $P(E) = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$. Нетрудно видеть, что $P(E) \leq \varepsilon$.

Чтобы получить нижнюю оценку ненадежности схем, рассмотрим специальный класс булевых функций.

Пусть $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а $K(n)$ – множество булевых функций вида $f(\tilde{x}^n) = (\bar{x}_i \vee h(\tilde{x}^n))^a$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \{0, 1\}$.

Нетрудно проверить, что число функций в классе $K(n)$ не больше $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

$$\text{Пусть } K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n).$$

Справедлива теорема 1, доказательство которой такое же, как доказательство теоремы 7 из работы [10].

Теорема 1 [10]. Пусть функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f . Тогда при всех α и τ таких, что $2\alpha + \tau \leq 1/2$, верно неравенство

$$P(S) \geq (2\alpha + \tau)(1 - \tau)m^2,$$

где $m = \min\{1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \delta\}$.

Следствие 1. Если функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f , то ненадежность $P(S)$ схемы S асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не меньше, чем $2\alpha + \tau$.

Таким образом, получена нижняя оценка ненадежности схем. Чтобы получить верхнюю оценку ненадежности схем, покажем, как по исходной схеме, реализующей функцию f , строить новую схему, которая также реализует функцию f , но, возможно, с меньшей вероятностью ошибки на выходе схемы.

Пусть f – произвольная булева функция; S – схема, реализующая функцию f . Возьмем два экземпляра схемы S и базисный элемент E_1 . Соединим выходы схем со входами элемента E_1 . Построенную схему обозначим $\psi(S)$. Очевидно, что эта схема реализует функцию $\bar{f}$. Возьмем два экземпляра схемы $\psi(S)$ и новый базисный элемент E_2 . Соединим выходы схем $\psi(S)$ со входами базисного элемента E_2 . Построенную таким образом схему обозначим через $\Psi(S)$. Очевидно, что схема $\Psi(S)$ реализует исходную функцию f . Справедлива теорема 2.

Теорема 2 [13]. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f . Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \leq \max \left\{ 2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S), \right. \\ \left. \alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2 \right\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S .

Рассуждая так же, как в [10] при доказательстве теоремы 5, и учитывая, что $\alpha \leq 2\alpha$, $\tau(\beta + \delta + \tau) \leq \tau$ (поскольку $\beta + \delta + \tau \leq 3\epsilon \leq 1$ при $\epsilon \in (0, 1/160]$), нетрудно доказать теорему 3.

Теорема 3. В базисе $\{x | y\}$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B , что при всех $\epsilon \in (0, 1/160]$ верно неравенство

$$P(B) \leq 2\alpha + \tau + 70\epsilon^2.$$

Следствие 2. Любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически не больше, чем $2\alpha + \tau$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 3 функцию f можно реализовать такой схемой B , что при достаточно малых ϵ верно неравенство $P(B) \leq 2\alpha + \tau + 70\epsilon^2$. Возможны два варианта: либо $2\alpha + \tau + 70\epsilon^2 \sim 2\alpha + \tau$ (и тогда утверждение следствия верно), либо $2\alpha + \tau + 70\epsilon^2 \leq k_1\epsilon^2$ при некотором $k_1 > 70$. Остановимся подробнее на этом случае. По схеме B построим схему $\Psi(B)$ и, пользуясь теоремой 1, оценим ее ненадежность:

$$P(\Psi(B)) \leq \max \left\{ 2\alpha + \tau + 4\epsilon(k_1\epsilon^2) + 2(k_1\epsilon^2)^2, \right. \\ \left. \alpha + \tau(\beta + \delta + \tau) + 2(\beta + \delta + \tau)(k_1\epsilon^2) + 4(k_1\epsilon^2)^2 \right\}.$$

Поскольку

$$\alpha \leq 2\alpha, \quad \tau(\beta + \delta + \tau) \leq \tau, \quad \beta + \delta + \tau \leq 3\epsilon,$$

получаем неравенство

$$P(\Psi(B)) \leq 2\alpha + \tau + 6\epsilon(k_1\epsilon^2) + 4(k_1\epsilon^2)^2 \leq 2\alpha + \tau + k_2\epsilon^3$$

при некотором $k_2 > 6k_1$.

Снова имеем два варианта: либо $2\alpha + \tau + k_2\epsilon^3 \sim 2\alpha + \tau$ (и тогда утверждение следствия верно), либо $2\alpha + \tau + k_2\epsilon^3 \leq k_3\epsilon^3$ при некотором k_3 . Повторяя предыдущие рассуждения, убедимся в справедливости следствия.

Следствие доказано.

Таким образом, получены следующие **результаты**:

1) любая схема, реализующая функцию $f \notin K$, функционирует с ненадежностью, которая асимптотически (при $\epsilon \rightarrow 0$) не меньше, чем $2\alpha + \tau$, т.е. оценка ненадежности $2\alpha + \tau$ неснижаема;

2) любую булеву функцию можно реализовать схемой S , ненадежность которой асимптотически не больше $2\alpha + \tau$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Следовательно, почти для любой функции f ($f \notin K$) схема S является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной $2\alpha + \tau$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

В частности, если вероятности появления на выходе базисного элемента любой из функций $f_2, f_3, \dots, f_{16}$ одинаковы, т.е. $p_2 = p_3 = \dots = p_{16} = p$, то $\alpha = 8p$, $\tau = 8p$. Поэтому при $p \rightarrow 0$ почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, ненадежность которой асимптотически равна $24p$.

Вывод: при произвольных неисправностях элементов в базисе, состоящем из функции «антиконъюнкция», возможна реализация почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надежности схемой.

Список литературы

1. **Романов, Д. С.** О диагностических тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях / Д. С. Романов // Прикладная математика и информатика. – 2010. – Т. 36. – С. 91.
2. **Romanov, D. S.** Diagnostic tests for local coalescences of variables in Boolean functions / D. S. Romanov // Computational Mathematics and Modeling. – 2012. – Т. 23. – С. 72–78.
3. **Морозов, Е. В.** Проверяющие тесты для булевых функций при линейных локальных неисправностях входов схем / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 49–61.
4. **Морозов, Е. В.** О проверяющих тестах относительно множественных линейных слипаний переменных / Е. В. Морозов, Д. С. Романов // Дискретная математика и ее приложения : материалы XI Междунар. семинара, посвящ. 80-летию со дня рожд. акад. О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.). – М. : Изд-во механико-математического фак-та МГУ, 2012. – С. 144–147.
5. **Алехина, М. А.** О синтезе надежных схем из функциональных элементов $x|y$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Вестник Московского университета. Математика. Механика. – 1991. – № 5. – С. 80–83.

6. **Алехина, М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59–74.
7. **Алехина, М. А.** О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях элементов / М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2005. – Т. 12. – С. 3–11.
8. **Алехина, М. А.** Ненадежность схем при слипаниях входов элементов / М. А. Алехина, О. А. Логвина // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2016. – № 9. – С. 98–100.
9. **Alekhina, M. A.** The Reliability of Circuits in the Basis Anticonjunction with Constant Faults of Gates / M. A. Alekhina, O. Yu. Barsukova // Computer Science and Information Technology. – 2014. – Vol. 2(1). – P. 51–54. DOI: 10.13189/csit.2014.020106.
10. **Алехина, М. А.** Синтез надежных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 3–15.
11. Избранные труды С. В. Яблонского / отв. ред. В. Б. Алексеев, В. И. Дмитриев. – М. : МАКС Пресс, 2004.
12. **Тарасов, В. В.** К синтезу надежных схем из ненадежных элементов / В. В. Тарасов // Математические заметки. – 1976. – Т. 20, № 3. – С. 391–400.
13. **Алехина, М. А.** Синтез, сложность и надежность схем из ненадежных функциональных элементов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Алехина М. А. – Пенза, 2004.

References

1. Romanov D. S. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied mathematics and informatics]. 2010, vol. 36, p. 91.
2. Romanov D. S. *Computational Mathematics and Modeling*. 2012, vol. 23, pp. 72–78.
3. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2015, vol. 22, no. 1, pp. 49–61.
4. Morozov E. V., Romanov D. S. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya: materialy XI Mezhdunar. seminara, posvyashch. 80-letiyu so dnya rozhd. akad. O. B. Lupanova (Moskva, MGU, 18–23 iyunya 2012 g.)* [Discrete mathematics and its applications: proceedings of XI International seminar devoted to the 80th anniversary of academician O.B. Lupanov (Moscow, MSU, 18th – 23rd June 2012)]. Moscow: Izd-vo mekhaniko-matematicheskogo fak-ta MGU, 2012, pp. 144–147.
5. Alekhina M. A. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Mathematics. Mechanics]. 1991, no. 5, pp. 80–83.
6. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, pp. 59–74.
7. Alekhina M. A. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy. Ser. 1* [Discrete analysis and research of operations. Series 1]. 2005, vol. 12, pp. 3–11.
8. Alekhina M. A., Logvina O. A. *Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie* [Applied discrete mathematics. Applications]. 2016, no. 9, pp. 98–100.
9. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Computer Science and Information Technology*. 2014, vol 2(1), pp. 51–54. DOI: 10.13189/csit.2014.020106.
10. Alekhina M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 2 (34), pp. 3–15.
11. *Izbrannye trudy S. V. Yablonskogo* [Selected works of S. V. Yablonsky]. Execut. ed. V. B. Alekseev, V. I. Dmitriev. Moscow: MAKSS Press, 2004.

12. Tarasov V. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical proceedings]. 1976, vol. 20, no. 3, pp. 391–400.
13. Alekhina M. A. *Sintez, slozhnost' i nadezhnost' skhem iz nenadezhnykh funktsional'nykh elementov: dis. d-ra fiz.-mat. nauk* [Synthesis, complexity and reliability of circuits consisting of unreliable functional gates: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Penza, 2004.

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики, Пензенский
государственный технологический
университет (Россия, г. Пенза,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1)

E-mail: ama@sura.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics, Penza State Technological
University (1a/1 Baydukova lane/Gagrina
street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Об асимптотически оптимальных по надежности схемах при неисправностях элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 60–67. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-6